Untersuchungen

über

die lineären Differentialgleichungen der zweiten und dritten Ordnung,

mit Genehmigung Einer hochverordneten physiko-mathematischen Fakultät

der Kaiserlichen Universität Dorpat

zur Erlangung der Doktor-Würde

zusammengestellt und vertheidigt

von

P. Helmling.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Dorpat.

Gedruckt bei Schünmann's Wittwe und C. Mattiesen.

1859.

Der Druck ist gestattet; die gesetzliche Anzahl von Exemplaren ist einzuliefern.

Dorpat, den 31. Mai 1859.

№ 23.

Decan **A. Petzholdt.**

Vorrede.

Auf keinem Gebiete der mathematischen Wissenschaften sind die Fortschritte im Ganzen, ungeachtet des aufgewendeten Scharfsinns der tüchtigsten Köpfe, so geringfügig, als auf dem Gebiete der Integration der Differentialgleichungen im Allgemeinen. Die meisten Analytiker haben deshalb specielle Zweige dieses grossen Gebietes zu ihrer Aufgabe gewählt, und auch in diesen speciellsten Zweigen ist noch unendlich viel zu thun. Insbesondere sind es die lineären Differentialgleichungen, denen man auch sonst in den Naturwissenschaften begegnet, welche eine sorgfältigere Beachtung gefunden haben. — In den vorliegenden, demselben Thema gewidmeten Untersuchungen war nächst den allgemeinen Betrachtungen die Integration der Gleichung:

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2) \cdot d^2 y_x + (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2) \cdot dy_x + (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2) \cdot y = 0$$

das Ziel, das dem Verfasser vorgeschwebt; leider gelang jedoch die Integration nur in besondern Fällen, und der Verfasser wird später auf dasselbe Thema zurückkommen.

Der grossen Schwierigkeit des Satzes und des damit verbundenen Aufenthaltes wegen hat ein beträchtlicher Theil hierher gehöriger Untersuchungen unterdrückt werden müssen.

Helmling.

Thesen.

1) Die gerade Linie ist ein Kreis.

2) Das unendlich Kleine konnte nur Missverstand aus der Analysis verbannen wollen.

3) Licht und strahlende Wärme sind identisch.

4) Licht und strahlende Wärme sind nicht identisch.

5) Die Existenz des Aethers kann als erwiesen betrachtet werden.

6) Der Aether ist discret.

7) Die wägbare Materie ist discret.

8) Keine Materie ohne Kraft.

9) Die Materie hat kein wägbares Substrat; oder es giebt kein materielles Atom.

10) Die Herbartsche Philosophie allein ist mit dem heutigen Standpunkte der Naturwissenschaften verträglich.

Allgemeine Untersuchung über die lineären Differentialgleichungen der zweiten und dritten Ordnung.

§ 1.

Aus dem in der Einleitung vorausgeschickten geht hervor, dass das allgemeine Integral einer lineären Differentialgleichung höherer Ordnung, wenn man die erforderliche Anzahl, oder noch eine grössere Zahl von partikulären Integralen hat, in vielfacher Form dargestellt werden kann. Ferner ist bekannt, wie die Constanten des allgemeinen Integrals aus der hinreichenden Anzahl von partikulären Integralen gefunden werden können.*) Nach richtiger Bestimmung der Constanten stellt die durch das allgemeine Integral gegebene Funktion von x eine durchweg specialisirte Curve dar. Man darf nun wohl fragen: a) Wenn das allgemeine Integral in mehreren Gestalten gefunden ist, und man bestimmt die Constanten durch dieselben festen Punkte oder Anfangswerthe — sind dann die so gefundenen Funktionen, die durch das allgemeine Integral repräsentirt werden, auch wirklich identisch? oder mit andern Worten: sind die durch verschiedene Formen dargestellten Curven in allen ihren Punkten congruent? oder besteht das allgemeine Integral eben nur darin, dass die gefundene Funktion der Differéntialgleichung genügt, ohne eine bestimmte eindeutige Lösung zu geben? Man weiss, dass bei allen Untersuchungen der Physik, Mechanik, Astronomie etc., wo die Integrale lineärer Differentialgleichungen eine Rolle spielen, die Voraussetzung von der völligen Bestimmtheit der Lösung stillschweigend gemacht wird, und das Gegentheil würde alle diese Probleme in Frage stellen. Es mag deshalb wohl statthaft erscheinen, einmal die Beantwortung der sich daran knüpfenden Frage zu versuchen: Welche Bedingungen müssen erfüllt werden, wenn das in mehrfacher Form gefundene allgemeine Integral eine eindeutige Funktion sein soll? und, wird diesen Bedingungen in vorkommenden Fällen auch wirklich genügt?

Eine andere sich unmittelbar hieran anschliessende Frage ist: b) Wenn beliebig viele partikuläre Integrale und zwar mehr als die erforderliche Anzahl vorhanden sind,

*) Man sehe darüber *Petzval:* Integration der lineären Differentialgleichungen. Wien 1853.

— welcher Zusammenhang muss zwischen ihnen und den allgemeinen Coefficienten X_0, X_1, $X_2 \ldots X_n$ der Differentialgleichung stattfinden?

Da es zugleich in dem Zwecke der vorliegenden Abhandlung liegt, durch Eingehen auf specielle Fälle die allgemeinen Untersuchungen zu beleuchten, so mag es genügen, blos die Differentialgleichungen der zweiten und dritten Ordnung in dieser Hinsicht zu untersuchen, indem alsdann ein Fortschreiten zum allgemeineren Zusammenhang sich von selbst daraus erkennen lässt.

Seien nun y_1, y_2, y_3, y_4 vier partikuläre Integrale der Differentialgleichung:

$$X_0 . d^2y_x + X_1 . dy_x + X_2 . y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

so müssen zwischen je dreien derselben, wenn das allgemeine Integral einen eindeutigen Charakter haben soll, und wenn das allgemeine Integral durch y dargestellt wird, nothwendig folgende Gleichungen stattfinden:

$$\left.\begin{aligned} y &= A.y_1 + B.y_2 = C.y_1 + D.y_3 = E.y_2 + F.y_3 \\ y' &= A.y_1' + B.y_2' = C.y_1' + D.y_3' = E.y_2' + F.y_3' \\ y'' &= A.y_1'' + B.y_2'' = C.y_1'' + D.y_3'' = E.y_2'' + F.y_3'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

und durch weiteres Differentiiren folgt sodann

In diesem System von 9 Gleichungen ist immer je die dritte eine Folge der beiden andern, so dass sie nur 6 von einander unabhängige Gleichungen repräsentiren. Da man nun durch eine der 6 Constanten A, B, C, D, E, F (etwa durch A) wegdividiren kann, so muss ausser den 5 Bestimmungsgleichungen der Quotienten $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \frac{E}{A}, \frac{F}{A}$, noch eine 6te Bedingungsgleichung zwischen den verschiedenen partikulären Integralen und ihren Ableitungen stattfinden. Eliminirt man die obigen 5 Quotienten, so findet man ohne Schwierigkeit die Bedingungsgleichung:

$$\frac{y_1 \cdot y_3' - y_1' \cdot y_3}{y_1' \cdot y_3'' - y_1'' \cdot y_3'} = \frac{y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2}{y_1' \cdot y_2'' - y_1'' \cdot y_2'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

der man noch, wie leicht erkannt wird, die sehr compendiöse Form geben kann:

$$d_x\left(\frac{y_3'}{y_1'}\right) : d_x\left(\frac{y_3}{y_1}\right) = d_x\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right) : d_x\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3a$$

Setzt man nach und nach y_4 statt y_3, y_3 statt y_2, y_2 statt y_1 u. s. w., so hat man die allgemeine Bedingung für beliebig viele partikuläre Integrale.

Denkt man sich nun das Integral y_3 durch die in der Einleitung gegebene Form $y_3 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx} . dx}{(y_1)^2}$ dargestellt, und bezeichnet man zur Abkürzung $e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}$ mit U

so hat man: $y_3 = y_1 \cdot \int \frac{U}{(y_1)^2} . dx$; $y_3' = y_1' \cdot \int \frac{U}{(y_1)^2} dx + \frac{U}{y_1}$

$$y_3'' = y_1'' \int \frac{U}{(y_1)^2} dx + y_1' \cdot \frac{U}{(y_1)^2} + d_x \cdot \left(\frac{U}{y_1}\right) = y_1'' \cdot \int \frac{U}{(y_1)^2} . dx + \frac{U.y_1' + y_1 U' - U.y_1'}{(y_1)^2} =$$

$$= y_1'' \cdot \int \frac{U dx}{(y_1)^2} + \frac{U'}{y_1}$$

Sei nun zur ferneren Vereinfachung $\int \frac{U dx}{(y_1)^2} = Z$, so kommt, indem man die Ausdrücke für y_3, y_3', y_3'' in die Gleichung 3 substituirt:

$$y_1 \cdot y_3' - y_1' \cdot y_3 = y \cdot y_1' \cdot Z + U - y y_1' \cdot Z = U; \text{ ferner}$$

$$y_1' y_3'' - y_1'' y_3' = y_1' y_1'' Z + y_1' \frac{U'}{y_1} - y_1' y_1'' Z - y_1'' \cdot \frac{U}{y_1}$$

d. i.: $y_1' y_3'' - y_1'' y_3' = \frac{y_1' U' - y_1'' U}{y_1}$. Demnach folgt:

$$\frac{y_1 y_3' - y_1' y_3}{y_1' y_2'' - y_1'' y_2'} = \frac{y_1' \cdot U' - y_1'' U}{y_1 \cdot U} = \frac{y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2}{y_1' \cdot y_2'' - y_1'' \cdot y_2'} \quad \text{oder}$$

$$\frac{y_1' \cdot \frac{U'}{U} - y_1''}{y_1} = \frac{y_1' y_2'' - y_1'' y_2'}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$$

Weil nun zufolge der Bedeutung von U sein muss:

$\frac{U'}{U} = -\frac{X_1}{X_0}$, so ergiebt sich: $\frac{-y_1' \cdot X_1 - y_1'' X_0}{y_1 \cdot X_0} = \frac{y_1' y_2'' - y_1'' y_2'}{y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2}$

oder auch:

$$-y_1' \cdot (y_1 y_2' - y_1' y_2) \cdot X_1 - y_1 \cdot y_1'' y_2' \cdot X_0 + y_1' y_1'' y_2 X_0 = y_1 y_1' y_2'' X_0 - y_1 y_1'' y_2' X_0$$

d. i.: $-(y_1 y_2' - y_1' y_2) \cdot X_1 + (y_1'' y_2 - y_1 y_2'') \cdot X_0 = o$

oder was dasselbe ist:

$$y_2 (y_1' X_1 + y_1'' X_0) = y_1 (y_2' X_1 + y_2'' X_0)$$

Aber aus der Differentialgleichung folgt weiter:

$$y_1' \cdot X_1 + y_1'' \cdot X_0 = -y_1 \cdot X_2$$
$$y_2' \cdot X_1 + y_2'' \cdot X_0 = -y_2 \cdot X_2$$

und dadurch wird die vorhergehende Gleichung zu einer reinen Identität, was gezeigt werden sollte.

Es wird also die allgemeine Bedingungsgleichung 3) oder 3a erfüllt, wenn man die mit y_3 (und ganz eben so mit y_4) bezeichneten Integrale substituirt, und mithin die Richtigkeit der gemachten Voraussetzung bestätigt. Man könnte allerdings noch den Einwand machen, dass die Integrale y_3 und y_4 vielleicht gar nicht von y_1 und y_2 wesentlich verschieden seien, und in der That lässt sich Etwas ähnliches nachweisen, wie später gezeigt werden soll. Dass aber auch die Bestätigung erfolgt, wenn man statt der Integrale y_3, y_4, ein gewissermassen heterogenes, etwa durch eine unendliche Reihe dargestelltes partikuläres Integral einsetzt, soll wenigstens in einem speciellen Fall gezeigt werden. — Die lineäre Differentialgleichung

$$x \cdot d^2 y_x + b \cdot dy_x - q^2 \cdot x^{2n-1} \cdot y = o \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

wo b, q und n positive Constante, sonst aber beliebige Grössen sein können, so dass also auch $2n-1$ beliebig ist, — hat, wie später dargethan werden soll, die 3 partikulären Integrale:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \int_r^\infty e^{-x^n} . z . (z^2 - r^2)^{\frac{b-n-1}{2n}} . dz \ldots (r = \tfrac{q}{2}) \\ y_2 &= \int_{-r}^\infty e^{-x^n} . z . (z^2 - r^2)^{\frac{b-n-1}{2n}} . dz. \\ y_3 &= \int_{-r}^{+r} e^{-x^n} . z . (z^2 - r^2)^{\frac{b-n-1}{2n}} . dz. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 5)$$

(b kann auch negativ sein, dann ist es aber an die Bedingung geknüpft: $b > -n+1$.) die unter sich durch die einfache Gleichung $y_3 = y_2 - y_1$ zusammenhängen. Durch einige vorläufige Versuche findet man, dass der Differentialgleichung auch eine unendliche Reihe von der Form

$$y = A . x^\alpha + A_1 . x^{2n+\alpha} + A_2 . x^{4n+\alpha} + A_3 . x^{6n+\alpha} + \ldots .$$

genügt, und wenn man ihre Differentiale darstellt und in die Gleichung 4 einführt und die Vorzahlen gleicher Potenzen vergleicht, so ergiebt sich, dass zunächst zur Bestimmung von α die Gleichung stattfinden muss:

$$(b + \alpha - 1) . \alpha . A = o;$$

da aber A nicht $= o$ sein soll, so muss entweder $\alpha = o$ oder $\alpha = 1 - b$ sein. Dadurch ergeben sich zwei Gleichungssysteme zur Bestimmung von $A_1, A_2, A_3 \ldots$ von folgender Form:

für $\alpha = o$	für $\alpha = 1 - b$
$(2n - 1 + b) . 2n . A_1 = q^2 . A$	$(2n + 1 - b) . 2n . A_1 = q^2 . A$
$(4n - 1 + b) . 4n . A_2 = q^2 . A_1$	$(4n + 1 - b) . 4n . A_2 = q^2 . A_1$
$(6n - 1 + b) . 6n . A_3 = q^2 . A_2$	$(6n + 1 - b) . 6n . A_3 = q^2 . A_2$
. . . . .	. . . . .
$(2\mu n - 1 + b) . 2\mu n . A\mu = q^2 . A_{\mu-1}$	$(2\mu n + 1 - b) . 2\mu n . A\mu = q^2 . A_{\mu-1}$

$\mu = 1, 2, 3 \ldots$ in infinit.

Sei in dem einen Fall A, in dem andern B die beliebige Integrationsconstante, so erhält man:

$A_1 = \frac{q^2 . A}{(2n-1+b) . 2n}$	$A_1 = \frac{q^2 . B}{(2n+1-b) . 2n}$
$A_2 = \frac{q^4 . A}{(2n-1+b)(4n-1+b)(2n)^2 . 2!}$	$A_2 = \frac{q^4 . B}{(2n+1-b)(4n+1-b)(2n)^2 . 2!}$
$A_3 = \frac{q^6 . A}{(2n-1+b)(4n-1+b)(6n-1+b)(2n)^3 . 3!}$	$A_3 = \frac{q^6 . B}{(2n+1-b)(4n+1-b)(6n+1-b)(2n)^3 . 3!}$
. . . . .	. . . . .

wobei sich für b die weitere Bedingung ergiebt, dass b nicht $= 2\mu n + 1$ sein darf, wenn man die negativen b ausschliesst. Dadurch hat man also die weiteren partikulären Integrale:

$$y_4 = 1 + \frac{q^2 . x^{2n}}{2n . (2n-1+b)} + \frac{q^4 . x^{4n}}{(2n)^2 . 2! . (2n-1+b)(4n-1+b)} + \frac{q^6 . x^{6n}}{(2n)^3 . 3! . (2n-1+b)(4n-1+b)(6n-1+b)} + \ldots$$

$$y_5 = x^{1-b} \cdot \left\{ 1 + \frac{q^2 \cdot x^{2n}}{2n \cdot (2n+1-b)} + \frac{q^4 \cdot x^{4n}}{(2n)^2 \cdot 2! \cdot (2n+1-b)(4n+1-b)} + \right.$$
$$\left. + \frac{q^6 \cdot x^{6n}}{(2n)^3 \cdot 3! \cdot (2n+1-b)(4n+1-b)(6n+1-b)} + \ldots \right\}$$

Beide Reihen convergiren für jeden beliebigen Werth von x von $-\infty$ bis $+\infty$, obgleich hier nur die positiven x in Betracht kommen können. Es lassen sich nun nach dem in der Einleitung vorausgeschickten noch folgende partikuläre Integrale hinstellen:

$$Y_1 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{b}{x} dx}}{(y_1)^2} \cdot dx \quad \text{oder} \quad Y_1 = y_1 \cdot \int \frac{dx}{x^b \cdot (y_1)^2}$$

$$Y_2 = y_2 \cdot \int \frac{dx}{x^b \cdot (y_2)^2}; \quad Y_3 = y_3 \cdot \int \frac{dx}{x^b \cdot (y_3)^2};$$

$$Y_4 = y_4 \cdot \int \frac{dx}{x^b \cdot (y_4)^2}; \quad Y_5 = y_5 \cdot \int \frac{dx}{x^b \cdot (y_5)^2}.$$

Man kann demnach das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung unter $\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ Formen darstellen. Wie viele von diesen Formen im Wesentlichen identisch sein können, soll später untersucht werden.

In Beziehung auf die Formen Y_1, Y_2, Y_3 in Verbindung mit y_1, y_2, y_3 ist die Prüfung der aufgestellten Bedingungsgleichung, dem Vorhergehenden gemäss, schon erledigt.

Was die Integrale y_4, Y_4 und y_5, Y_5 betrifft, so würde in der allgemeinen Form diese Prüfung Schwierigkeiten haben, weil eine Vergleichung der gewonnenen Resultate wegen der Unausführbarkeit der Integration nicht wohl angeht. Wählt man jedoch b so, dass der Bruch $\frac{b-n-1}{2n}$ eine positive ganze Zahl wird, so lassen sich die bestimmten Integrale in endlicher Form ermitteln, welchen positiven Werth man auch für n setzen mag.

Nimmt man etwa $b = 7$, $n = 2$, wobei allerdings die Form y_5 wegfällt, da ein Faktor im Nenner $= o$ wird, und bezeichnet man wieder $\frac{q}{2}$ mit r, so ist $\frac{b-n-1}{2n} = 1$, und man hat:

$$y_1 = \int_r^\infty e^{-x^2 \cdot z} \cdot (z^2 - r^2) \cdot dz; \quad y_2 = \int_{-r}^\infty e^{-x^2 \cdot z} \cdot (z^2 - r^2) \cdot dz$$

Dann findet man in bekannter Weise:

$$y_1 = \frac{2 \cdot e^{-rx^2}}{x^6} \cdot (1 + rx^2); \quad y_1' = -\frac{4 \cdot e^{-rx^2}}{x^7} \cdot (3 + 3rx^2 + r^2x^4)$$

$$y_1'' = +\frac{4 \cdot e^{-rx^2}}{x^8} \cdot (21 + 21rx^2 + 9r^2x^4 + 2r^3x^6)$$

$$y_2 = \frac{2 \cdot e^{+rx^2}}{x^6} \cdot (1 - rx^2); \quad y_2' = -\frac{4 \cdot e^{+rx^2}}{x^7} \cdot (3 - 3rx^2 + r^2x^4)$$

$$y_2'' = +\frac{4 \cdot e^{+rx^2}}{x^8} \cdot (21 - 21rx^2 + 9r^2x^4 - 2r^3x^6)$$

Weil nun ferner $y_3 = y_2 - y_1$, so hat man ohne Mühe

$$y_3 = -\frac{4}{x^6} \cdot (rx^2 \cdot \mathfrak{Cos}\, rx^2 - \mathfrak{Sin}\, rx^2)$$

wo wie gewöhnlich $\mathfrak{Cos}\, rx^2 = \frac{e^{rx^2} + e^{-rx^2}}{2}$; $\mathfrak{Sin}\, rx^2 = \frac{e^{rx^2} - e^{-rx^2}}{2}$, und weil auch $y_3' = y_2' - y_1'$, $y_3'' = y_2'' - y_1''$, so ergeben sich die Differentiale von y_3 eben so leicht.

Bezeichnet man ferner $2n - 1 + b$ mit b_1, $4n - 1 + b$ mit b_2, $6n - 1 + b$ mit b_3 u. s. w., so folgt aus:

$$y_4 = 1 + \frac{q^2 \cdot x^{2n}}{2n \cdot b_1} + \frac{q^4 \cdot x^{4n}}{(2n)^2 \cdot 2! b_1 \cdot b_2} + \frac{q^6 \cdot x^{6n}}{(2n)^3 \cdot 3! b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} + \cdots$$

$$y_4' = \frac{1}{x} \cdot \left\{ \frac{q^2 \cdot x^{2n}}{b_1} + \frac{q^4 \cdot x^{4n}}{2n \cdot 1! b_1 \cdot b_2} + \frac{q^6 \cdot x^{6n}}{(2n)^2 \cdot 2! b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} + \cdots \right\}$$

$$y_4'' = \frac{1}{x^2} \cdot \left\{ \frac{2n-1}{1} \cdot \frac{q^2 \cdot x^{2n}}{b_1} + \frac{4n-1}{1} \cdot \frac{q^4 \cdot x^{4n}}{2n \cdot b_1 \cdot b_2} + \frac{6n-1}{1} \cdot \frac{q^6 \cdot x^{6n}}{(2n)^2 \cdot 2! b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} + \cdots \right\}$$

und also für $b = 7$, $n = 2$.

$$y_4 = 1 + \frac{q^2 \cdot x^4}{4.1!2.5} + \frac{q^4 \cdot x^8}{4^2.2!2^2.5.7} + \frac{q^6 \cdot x^{12}}{4^3.3!2^3.5.7.9} + \cdots$$

$$y_4' = \frac{1}{x^2} \cdot \left\{ \frac{q^2 \cdot x^4}{2.1.5} + \frac{q^4 \cdot x^8}{4.1!2^2.5.7} + \frac{q^6 \cdot x^{12}}{4^2.2!2^3.5.7.9} + \cdots \right\}$$

$$y_4'' = \frac{1}{x^2} \cdot \left\{ \frac{3}{1} \cdot \frac{q^2 \cdot x^4}{2.5} + \frac{7}{1} \cdot \frac{q^4 \cdot x^8}{4.1!2^2.5.7} + \frac{11}{1} \cdot \frac{q^6 \cdot x^{12}}{4^2.2!2^3.5.7.9} + \cdots \right\}$$

Führt man die Werthe von $y_1\ y_1'\ y_1''\ y_2\ y_2'\ y_2''$ in die allgemeine Bedingungsgleichung:

$$d_x\left(\frac{y_4'}{y_1'}\right) : d_x\left(\frac{y_4}{y_1}\right) = d_x\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right) : d_x\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

oder was dasselbe ist, in:

$$\frac{y_1 \cdot y_4' - y_1' \cdot y_4}{y_1' \cdot y_4'' - y_1' \cdot y_4''} = \frac{y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2}{y_1' \cdot y_2'' - y_1' \cdot y_2''}$$

ein, und lässt man überall die gemeinsamen Faktoren weg, so muss sein:

$$\frac{x^2 \cdot (1 + rx^2) \cdot y_4' + 2x \cdot (3 + 3rx^2 + r^2x^4) \cdot y_4}{(21 + 21rx^2 + 9r^2x^4 + 2r^3x^6) \cdot y_4' - x \cdot (3 + 3rx^2 + r^2x^4) \cdot y_4''} =$$

$$= \frac{x^2 \cdot [(3 + 3rx^2 + r^2x^4)(1 - rx^2) - (3 - 2rx^2 + r^2x^4)(1 + rx^2)]}{(21 + 21rx^2 + 9r^2x^4 + 2r^3x^6)(3 - 3rx^2 + r^2x^4) - (21 - 21rx^2 + 9r^2x^4 - 2r^3x^6)(3 + 3rx^2 + r^2 \cdot x^4)}$$

Führt man die nöthigen Reduktionen aus, so kommt:

$$x \cdot y_4'' + 7 \cdot y_4' = 4 \cdot r^2 \cdot x^3 \cdot y_4$$

und dies ist in Folge der Differentialgleichung 4) wirklich eine identische Gleichung $q.e.d.$

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich somit für die lineären Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, dass das allgemeine Integral derselben eine eindeutige bestimmte Funktion ist, und wenn man die Constanten gehörig bestimmt, so hat diese Funktion einen unveränderlichen Verlauf in ihrer ganzen Ausdehnung, in welcher Ordnung man auch die gewonnenen partikulären Integrale zur Darstellung des allgemeinen Integrals verwenden möge.

Kehren wir nach diesen Betrachtungen wieder zur allgemeinen Bedingungsgleichung 3) zurück, so kann man derselben, indem man die Nenner wegschafft, auch die folgende Form geben:

$$(y_1y_2' - y_1'y_2) \cdot y_3'' + (y_1''y_2 - y_1y_2'') \cdot y_3' + (y_1''y_2' - y_1'y_2'')y_3 = o \quad . \quad 7)$$

und die Anordnung bleibt eben so symmetrisch, wenn man nach y_2'', y_2', y_2 oder y_1'', y_1', y_1 ordnet. Vergleicht man aber diese Form mit der gegebenen allgemeinen Differentialgleichung selbst, indem man darin y_3 statt y setzt, nämlich:

$$X_0 \cdot y_3'' + X_1 \cdot y_3' + X_2 \cdot y_3 = o;$$

so muss sein·

$$\frac{y_1''y_2 - y_1y_2''}{y_1y_2' - y_1'y_2} = \frac{X_1}{X_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

$$\frac{y_1''y_2' - y_1'y_2''}{y_1y_2' - y_1'y_2} = \frac{X_2}{X_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

und entsprechende Gleichungen ergeben sich, wenn man y_3 statt y_2 oder y_1 setzt. In der Gleichung 8) ist aber, wie man leicht erkennt:

$$y_1''y_2 - y_1y_2' = -d_x(y_1y_2' - y_1'y_2),$$

also der Ausdruck zur Linken (in 8) ein vollständiges Differential, so dass man durch Integration erhält:

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx + Const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

oder auch:

$$k \cdot (y_1y_2' - y_1'y_2) = e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx},$$

wenn $Const. = l\frac{1}{k}$ gesetzt wird. Analoge Beziehungen ergeben sich zwischen je zwei beliebigen partikulären Integralen. Man errkennt hieraus, dass der Ausdruck $e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}$ eine symmetrische Funktion je zweier partikulärer Integrale sein muss, multiplicirt mit einer Constanten. Sind ferner y_1, y_2 gegeben, und etwa y_3 nach Nr. 3a) der Einleitung gefunden: $y_3 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1)^2} \cdot dx$, so findet sich aus 10) derselbe Werth für y_2, nämlich: $y_2 = \frac{1}{k} y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1)^2} \cdot dx$, so dass also die beiden Funktionen y_2 und y_3, wie sie auch sonst beschaffen sein mögen, ein constantes Verhältniss zu einander haben. Analog verhalten sich die Funktionen y_1 und y_4, wenn $y_4 = y_2 \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1)^2} \cdot dx$.

Es scheint mir wohl der Mühe werth, an einem Beispiel die Richtigkeit der vorausgeschickten Sätze zu zeigen.

Nach Nr. 5a) ist $y_1 = \frac{2 \cdot e^{-rx^2}}{x^6} \cdot (1 + rx^2)$; $y_2 = \frac{2 \cdot e^{rx^2}}{x^6} \cdot (1 - rx^2)$. Nun hat man:

$$Y_1 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1)^2} \cdot dx = \frac{2 \cdot e^{-rx^2}}{x^6} \cdot (1 + rx^2) \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{7}{x} dx} \cdot x^{12}}{4 \cdot e^{-2rx^2} \cdot (1+rx^2)^2} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-rx^2}}{x^6} \cdot (1 + rx^2) \cdot \int \frac{e^{2rx^2} \cdot x^5}{(1 + rx^2)^2} \cdot dx.$$

Setzt man $x^2 = u$, so kann man das Integral durch theilweise Integration ohne Schwierigkeit ermitteln und findet dasselbe $= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2rx^2} \cdot (rx^2 - 1)}{r \cdot (1 + rx^2)}$, so dass in der That $Y_1 = -\frac{1}{8r} \cdot \frac{2e^{rx^2} \cdot (1 - rx^2)}{x^6} = -\frac{1}{8r} \cdot y_2$ gefunden wird und in gleicher Weise findet sich

$$Y_2 = y_2 \int \frac{e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_2)^2} \cdot dx = -\frac{1}{8r} \cdot y_1.$$

Was das Integral y_3 in Nr. 5 betrifft, so ergiebt sich ganz einfach: weil $y_3 = y_2 - y_1$ aus $y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx + Const.}$ $y_1(y_2' - y_1') - y_1'(y_2 - y_1) = y_1 y_2' - y_1' y_2$, so dass es keiner weiteren Untersuchung bedarf.

Aus den Gleichungen 8) und 9) lässt sich noch ein merkwürdiger Ausdruck für das vollständige Integral der allgemeinen Differentialgleichung $X_0 \cdot y'' + X_1 \cdot y' + X_2 \cdot y = o$ ableiten. Bezeichnet man die Integrationsconstanten mit lk_1 und e^{lk_1}, so kommt aus 8)

$y_1 y_2' - y_1' y_2 = k \cdot e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}$, und dadurch geht die 9 über in:

$y_1'' y_2' - y_1' y_2'' = k \cdot \frac{X_2}{X_0} \cdot e^{\int \frac{X_1}{X_0} dx}$, und wenn man $e^{\int \frac{X_1}{X_0} dx}$ mit $e^{\varphi x}$ bezeichnet,

so hat man auch $-d_x \cdot \left(\frac{y_2'}{y_1'}\right) = k \cdot \frac{X_2}{X_0} \cdot \frac{e^{\varphi x}}{(y_1')^2}$, woraus durch Integration

$$\frac{y_2'}{y_1'} = k_1 - k \cdot \int \frac{X_2}{X_0} \cdot \frac{e^{\varphi x}}{(y_1')^2} \cdot dx \quad \text{oder} \quad y_2' = y_1' \cdot \left(k_1 - k \cdot \int \frac{X_2}{X_0} \cdot \frac{e^{\varphi x}}{(y_1)^2} \cdot dx\right)$$

Verbindet man, statt zu integriren, diese Gleichung mit $y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2 = k \cdot e^{-\varphi x}$, so kommt:

$$y_2 = y_1 \cdot k_1 - k \cdot \left(y_1 \cdot \int \frac{X_2}{X_0} \cdot \frac{e^{\varphi x}}{(y_1')^2} \cdot dx + \frac{e^{-\varphi x}}{y_1'}\right) = y \quad \ldots \quad 11)$$

wenn y das allgemeine Integral bezeichnet.

Dass man es nicht mehr mit einem partikulären Integral zu thun hat, geht daraus hervor, dass 1) zwei willkürliche Constanten darin vorkommen, und 2) alle in der Differentialgleichung enthaltenen Funktionen von x zu seiner Darstellung verwendet sind.

Man kann sich vermittelst des oben gegebenen Beispiels (unter Nr. 5a) leicht von der Richtigkeit des eben gesagten überzeugen, und wenn man die Constanten entsprechend modificirt, so erhält man in der That $y = k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2 \ldots$

§ 2.

Seien ferner y_1, y_2, y_3, y_4 partikuläre Integrale der Differentialgleichung der dritten Ordnung:

$$X_0 . d^3y_x + X_1 . d^2y_x + X_2 . dy_x + X_3 . y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

und bezeichnet man wieder mit y das allgemeine Integral, und mit A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M, N die willkürlichen Integrationsconstanten, so muss, wenn das allgemeine Integral eine eindeutige Funktion sein soll, nothwendig das folgende Gleichungssystem stattfinden:

$$\left.\begin{aligned}
y &= Ay_1 + By_2 + Cy_3 = Dy_1 + Ey_2 + Fy_4 = Gy_1 + Hy_3 + Ky_4 = Ly_2 + My_3 + Ny_4 \\
y' &= Ay_1' + By_2' + Cy_3' = Dy_1' + Ey_2' + Fy_4' = Gy_1' + Hy_3' + Ky_4' = Ly_2' + My_3' + Ny_4' \\
y'' &= Ay_1'' + By_2'' + Cy_3'' = Dy_1'' + Ey_2'' + Fy_4'' = Gy_1'' + Hy_3'' + Ky_4'' = Ly_2'' + My_3'' + Ny_4'' \\
y''' &= Ay_1''' + By_2''' + Cy_3''' = Dy_1''' + Ey_2''' + Fy_4''' = Gy_1''' + Hy_3''' + Ky_4''' = Ly_2''' + My_2''' + Ny_4'''
\end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Hier repräsentirt jede Horizontalreihe 3, von einander unabhängige Gleichungen, und man hat also 12 Gleichungen zur Bestimmung der 11 Quotienten $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A} \ldots \frac{N}{A}$. Setzt man für diese Quotienten der Reihe nach $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta, \iota, \varkappa, \lambda, \mu$ und drückt man in den so vereinfachten Gleichungen etwa y_1 durch die übrigen y_2, y_3, y_4 aus, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}
(\delta - \vartheta) y_1 &= -\varepsilon . y_2 + \eta . y_3 + (\iota - \zeta) y_4 \\
(\delta - \vartheta) y_1' &= -\varepsilon . y_2' + \eta . y_3' + (\iota - \zeta) y_4' \\
(\delta - \vartheta) y_1'' &= -\varepsilon . y_2'' + \eta . y_3'' + (\iota - \zeta) y_4'' \\
(\delta - \vartheta) y_1''' &= -\varepsilon . y_2''' + \eta . y_3''' + (\iota - \zeta) y_4'''
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

und hieraus folgt weiter, wenn man aufs Neue die Quotienten $\frac{\eta}{\varepsilon}$ mit η_1 $\frac{\iota - \zeta}{\varepsilon}$ mit ζ_1 bezeichnet

$$\left.\begin{aligned}
\frac{y_1'}{y_1} &= \frac{-y_2' + \eta_1 . y_3' + \zeta_1 . y_4'}{-y_2 + \eta_1 . y_3 + \zeta_1 . y_4} \\
\frac{y_1''}{y_1'} &= \frac{-y_2'' + \eta_1 . y_3'' + \zeta_1 . y_4''}{-y_2' + \eta_1 . y_3' + \zeta_1 . y_4'} \\
\frac{y_1'''}{y_1''} &= \frac{-y_2''' + \eta_1 . y_3''' + \zeta_1 . y_4'''}{-y_2'' + \eta_1 . y_3'' + \zeta_1 . y_4''}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Eliminirt man aus der Gruppe 4) die Constanten η_1 ζ_1, so findet man nach einigen sich von selbst darbietenden Transformationen die symmetrische Bedingungsgleichung:

$$\frac{d_x\left(\frac{y_2}{y_1}\right) . d_x\left(\frac{y_3'}{y_1'}\right) - d_x\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right) . d_x\left(\frac{y_3}{y_1}\right)}{d_x\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right) . d_x\left(\frac{y_3''}{y_1''}\right) - d_x\left(\frac{y_2''}{y_1''}\right) . d_x\left(\frac{y_3'}{y_1'}\right)} = \frac{d_x\left(\frac{y_3}{y_1}\right) . d_x\left(\frac{y_4'}{y_1'}\right) - d_x\left(\frac{y_3'}{y_1'}\right) . d_x\left(\frac{y_4}{y_1}\right)}{d_x\left(\frac{y_3'}{y_1'}\right) . d_x\left(\frac{y_4''}{y_1''}\right) - d_x\left(\frac{y_3''}{y_1''}\right) . d_x\left(\frac{y_4'}{y_1'}\right)} \quad 5)$$

oder in entwickelter Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(y_1y_2'-y_1'y_2)\,(y_1'y_3''-y_1''y_3')-(y_1'y_2''-y_1''y_2')\,(y_1y_3'-y_1'y_3)}{(y_1'y_2''-y_1''y_2')\,(y_1''y_3'''-y_1'''y_3'')-(y_1''y_2'''-y_1'''y_2'')\,(y_1'y_3''-y_1''_3y')} =\\ &=\frac{(y_1y_3'-y_1'y_3)\,(y_1'y_4''-y_1''y_4')-(y_1'y_3''-y_1''y_3')\,(y_1y_4'-y_1'y_4)}{(y'_1y_3''-y_1''y_3')\,(y_1''y_4'''-y_1'''y_4'')-(y_1''y_3'''-y_1'''y_3'')\,(y_1'y_4''-y_1''_4y')}\end{aligned}\right\}\quad 5a)$$

Will man auch diese Bedingungsgleichung durch Hinsetzung eines weiteren partikulären Integrals nach der in der Einleitung gegebenen Form (Nr. 7a) auf eine Identität zurückführen, so hat man

$$y_4 = y_2\cdot\int\frac{y_1\cdot e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx}}{(y_1y_2'-y_1'y_2)^2}\cdot dx - y_1\cdot\int\frac{y_2\cdot e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx}}{(y_1y_2'-y_1'y_2)_2}\cdot dx$$

oder wenn man zur leichteren Uebersicht $\varphi = \frac{e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx}}{(y_1y_2'-y_1'y_2)^2}$ setzt:

$$y_4 = y_2\cdot\int y_1\cdot\varphi\cdot dx - y_1\int y_2\cdot\varphi\cdot dx$$

$$y_4' = y_2'\int y_1\cdot\varphi\cdot dx - y_1'\int y_2\cdot\varphi\cdot dx$$

$$y_4'' = y_2''\int y_1\cdot\varphi\cdot dx - y_1''\int y_2\cdot\varphi\cdot dx + \varphi\cdot(y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2)\text{ d. h.}$$

$$y_4'' = y_2''\int y_1\cdot\varphi\cdot dx - y_1''\int y_2\cdot\varphi\cdot dx + \frac{e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx}}{y_1y_2'-y_1'y_2}\text{ und ferner:}$$

$$y_4''' = y_2'''\int y_1\cdot\varphi\cdot dx - y_1'''\int y_2\cdot\varphi\cdot dx + \frac{y_1y_2''-y_1''y_2}{(y_1y_2'-y_1'y_2)^2}e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx} + d_x\cdot\frac{e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx}}{(y_1y_2'-y_1'y_2)}$$

Führt man die angedeutete Differentiation aus, so kommt:

$$y_4''' = y_2'''\cdot\int y_1\cdot\varphi\cdot dx - y_1'''\cdot\int y_2\cdot\varphi\cdot dx - \frac{X_1}{X_0}\cdot\frac{e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx}}{y_1y_2'-y_1'y_2}$$

Demnach hat man, wenn zur Vereinfachung $\frac{e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx}}{y_1y_2'-y_1'y_2} = U$ gesetzt wird:

$$y_4'' = y_2''\int y_1\cdot\varphi\cdot dx - y_1''\int y_2\cdot\varphi\cdot dx + U$$

$$y_4''' = y_2'''\cdot\int y_1\cdot\varphi\cdot dx - y_1'''\int y_2\cdot\varphi\cdot dx - \frac{X_1}{X_0}\cdot U.$$

Dadurch verwandeln sich die Ausdrücke in 5a), welche y_4 und seine Ableitungen enthalten, in die folgenden:

$$L = y_1y_4' - y_1'y_4 = (y_1y_2' - y_1'y_2)\cdot\int y_1\cdot\varphi\cdot dx$$

$$M = y_1'y_4'' - y_1''y_4' = (y_1'y_2'' - y_1''y_2')\cdot\int y_1\cdot\varphi\cdot dx + y_1'\cdot U$$

$$N = y_1''y_4''' - y_1'''y_4'' = (y_1''y_2''' - y_1'''y_2''')\cdot\int y_1\cdot\varphi\cdot dx - (X_1y_1'' + X_0y_1''')\cdot U$$

Bezeichnet man nun den Nenner in 5a) links mit R, den Zähler mit Q, und führt man die so gefundenen Ausdrücke ein, so fallen die mit dem Integrale $\int y_1\cdot\varphi\cdot dx$ multiplicirten Glieder heraus, der Rest geht durch U auf und man erhält:

$$Q\cdot(y_1'y_3''-y_1''y_3)(X_1y_1''+X_0y_1''')+Qy_1'\cdot(y_1''y_3'''-y_1'''y_3'')+R\cdot y_1'\cdot(y_1y_3'-y_1'y_3)=0$$

Um nun weiter zu reduciren, sei:

$$A=y_1y_2'-y_1'y_2 \qquad B=y_1y_3'-y_1'y_3$$
$$A_1=y_1'y_2''-y_1''y_2' \qquad B_1=y_1'y_3''-y_1''y_3'$$
$$A_2=y_1''y_2'''-y_1'''y_2'' \qquad B_2=y_1''y_3'''-y_1'''y_3''.$$

so geht die vorhergehende Gleichung nach Einsetzung dieser Ausdrücke in Q und R, und nach einigen Reduktionen über in:

$$(X_1\cdot y_1''+X_0\cdot y_1''')(AB_1-A_1B)+(AB_2-A_2B)\cdot y_1'=0.$$

Ordnet man nach den Ableitungen von y_1 oder y_2 oder y_3 und berücksichtigt man die Gleichungen:

$$X_0\cdot y_1'''+X_1\cdot y_1''+X_2\cdot y_1'+X_3\cdot y_1=0$$
$$X_0\cdot y_2'''+X_1\cdot y_2''+X_2\cdot y_2'+X_3\cdot y_2=0$$
$$X_0\cdot y_3'''+X_1\cdot y_3''+X_2\cdot y_3'+X_3\cdot y_3=0$$

so erhält man in der That zuletzt eine identische Gleichung, und es wäre nicht schwierig, aber sehr umständlich, diese Identität auch in dem Fall herzustellen, wenn eins der partikulären Integrale etwa in Form einer unendlichen Reihe zu dieser Untersuchung verwendet würde.

Schreibt man die Gleichung 5a) in folgender Form:

$$\frac{A_1\cdot B_2-A_2\cdot B}{A\cdot B_1-A_1\cdot B}=\frac{B\cdot(y_1'\cdot y_4''-y_1''\cdot y_4')-B_1\cdot(y_1\cdot y_4'-y_1'\cdot y_4)}{B_1\cdot(y_1''\cdot y_4'''-y_1'''\cdot y_4'')-B_2\cdot(y_1'\cdot y_4''-y_1''\cdot y_4')} \qquad 5b)$$

bezeichnet man den Bruch zur Linken mit $\frac{M}{N}$, schafft man die Nenner weg und ordnet man darauf nach y_4''', y_4'', y_4', y_4, so kommt:

$$M\cdot B_1\cdot y_1''\cdot y_4'''+[(AB_2-A_2B)\cdot y_1'-My_1''']\cdot B_1\cdot y_4''+$$
$$+[M\cdot B_2\cdot y_1''+NBy_1''+NB_1y_1]\cdot y_4'-N\cdot B_1\cdot y_1'\cdot y_4=0$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der folgenden:

$$X_0\cdot y_4'''+X_1\cdot y_4''+X_2\cdot y_4'+X_3\cdot y_4=0$$

so geben die nachstehenden Gleichungen die Beziehungen an, welche zwischen den drei der Differentialgleichung genügenden Particulär-Integralen, y_1, y_2, y_3 nebst ihren Ableitungen und den allgemeinen Coefficienten X_0, X_2, X_3, X_4 der Differentialgleichung Statt finden müssen:

Man hat nämlich:

$$\frac{X_1}{X_0}=\frac{(AB_2-A_2B)y_1'-M\cdot y_1'''}{M\cdot y_1''}$$

$$\frac{X_2}{X_0}=\frac{(MB_2+NB)\cdot y_1''+N\cdot B_1\cdot y_1}{M\cdot B_1\cdot y_1''}=\frac{(AB_2-A_2B)y_1''+Ny_1}{M\cdot y_1''}$$

$$\frac{X_3}{X_0}=-\frac{N\cdot y_1}{M\cdot y_1''}$$

Substituirt man für die vorstehenden Ausdrücke ihre oben angegebenen Werthe, so erhält man durch weitere Reduktion und Anordnung nach y_3 und seinen Ableitungen:

$$\frac{X_1}{X_0} = -\frac{y_3'''(y_1y_2'-y_1'y_2)+y_3''(y_1'''y_2-y_1y_2''')+y_3'(y_1''y_2'''-y_1'''y_2'')}{y_3''(y_1y_2'-y_1'y_2)+y_3'(y_1''y_2-y_1y_2'')+y_3(y_1'y_2''-y_1''y_2')} \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

$$\frac{X_2}{X_0} = \frac{y_3'''(y_1y_2''-y_1''y_2)+y_3''(y_1'''y_2-y_1y_2''')+y_3(y_1''y_2'''-y_1'''y_2'')}{y_3''(y_1y_2'-y_1'y_2)+y_3'(y_1''y_2-y_1y_2'')+y_3(y_1'y_2''-y_1''y_2')} \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

$$\frac{X_3}{X_0} = -\frac{y_3'''(y_1y_2''-y_1''y_2')+y_3''(y_1'''y_2'-y_1'y_2''')+y_3'(y_1''y_2'''-y_1'''y_2'')}{y_3''(y_1y_2'-y_1'y_2)+y_3'(y_1y_2''-y_1''y_2)+y_3(y_1'y_2''-y_1''y_2')} \quad . \quad . \quad 8)$$

In der Gleichung 6) erkennt man ohne Schwierigkeit, dass der Zähler zur Rechten das vollständige Differential des Nenners ist, und somit ergiebt sich durch Integration die merkwürdige Relation:

$$\left.\begin{aligned} &y_3''(y_1y_2'-y_1'y_2)+y_3'(y_1''y_2-y_1y_2'')+y_3(y_1'y_2''-y_1''y_2') = e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx + Const.} \\ &\text{oder durch cyklische Vertauschung:} \\ &y_2''(y_3y_1'-y_3'y_1)+y_2'(y_3''y_1-y_3y_1'')+y_2(y_3'y_1''-y_3''y_1') = e^{-\int\frac{X_2}{X_0}dx + Const.} \\ &y_1''(y_2y_3'-y_2'y_3)+y_1'(y_2''y_3-y_2y_3'')+y_1(y_2'y_3''-y_2''y_3') = e^{-\int\frac{X_3}{X_0}dx + Const.} \end{aligned}\right\} \quad 6a)$$

Bezeichnet man die willkürliche Constante mit $k(k)$, so ersieht man aus dem Gleichungssystem 6a), dass das Integral $k \cdot e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx}$ eine vollkommen symmetrische Funktion der drei particularen Integrale $y_1y_2y_3$ und ihrer Ableitungen ist.

Man erkennt ferner, dass diese Abhängigkeit nur von der zweiten Ordnung ist, wie die der Differentialgleichung der zweiten Ordnung sich als eine solche von der ersten Ordnung erwies. Die Gleichungen 7) und 8) gehen vermöge der 6) über in die folgenden:

$$y_3'''(y_1y_2''-y_1''y_2)+y_3''(y_1''y_2-y_1y_2'')+y_3'(y_1''y_2'''-y_1'''y_2'') = \frac{k \cdot X_2}{X_0} \cdot e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx} \quad 7a)$$

$$y_3'''(y_1'y_2''-y_1''y_2')+y_3''(y_1'''y_2'-y_1'y_2''')+y_3'(y_1''y_2'''-y_1'''y_2'') = -\frac{k \cdot X_3}{X_0} e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx} \quad 8a)$$

Eliminirt man aus den drei letzten Gleichungen die Grössen y_3''', y_3'', so fallen auch y_3', y_3 von selbst fort, und man erhält:

$$(y_1'y_2''-y_1''y_2') \cdot X_2 + (y_1''y_2-y_1y_2'') X_3 = (y_1''y_2'''-y_1'''y_2'') X_0 \quad . \quad . \quad .$$

welche Relation indessen, mit Zuziehung der Differentialgleichung selbst sich auf eine reine Identität reducirt.

Zu der bemerkenswerthen Gleichung 6a) gelangt man übrigens auch, wenn man aus der in der Einleitung gegebenen Formel:

$$y_3 = y_1 \cdot \int \frac{y_1 \cdot e^{\int\frac{X_1}{X_0}dx}}{y_1^2(y_1y_2'-y_1'y_2)^2} \cdot dx - y_1 \cdot \int \frac{y_2 \cdot e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx}}{y_1^2(y_1y_2'-y_1'y_2)^2} \cdot dx \quad . \quad . \quad 9)$$

und ihren Ableitungen, nämlich:

$$y_3' = y_2' \cdot \int \frac{y_1 \cdot e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1 y_2' - y_1' y_2)^2} \cdot dx - y_1' \cdot \int \frac{y_2 \cdot e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1 y_2' - y_1' y_2)^2} \cdot dx$$

$$y_3'' = y_2'' \cdot \int \frac{y_1 \cdot e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1' y_2 - y_1' y_2)^2} \cdot dx - y_1'' \cdot \int \frac{y_2 \cdot e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1 y_2' - y_1' y_2)^2} \cdot dx + \frac{e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1 y_2' - y_1' y_2)}$$

die beiden Integrale zur Rechten eliminirt, und die aus dem Eliminationsprocess hervorgehende Bedingungsgleichung hinstellt. Da nun die in 6a) aufgestellte Relation zwischen je drei partikulären Integralen und ihren Ableitungen, unabhängig von jeder besonderen Form derselben, Statt findet, und da die obige Elimination zu derselben Relation führt, so folgt hieraus und aus Nr. 6a) für die lineären Differentialgleichungen der dritten Ordnung der Satz:

Wenn von beliebig vielen gegebenen partikulären Integralen je zwei (y_1 y_2) zur Darstellung eines dritten (y_3) nach Nr. 9) verwendet werden, so kann das so gefundene Integral von einem schon gegebenen sich nur durch einen constanten Faktor unterscheiden.

Es wäre wohl möglich, dieses bemerkenswerthe Ergebniss in einem speciellen Fall zu bestätigen. Da jedoch die dazu erforderlichen Rechnungen ausserordentlich weitläufig ausfallen und den übersichtlichen Gang der vorliegenden Abhandlung bedeutend beeinträchtigen würden, so mag es genügen, für Liebhaber ein jedenfalls nicht gewöhnliches Beispiel zur Untersuchung hier aufzuführen:

Es bezeichne X eine beliebige Funktion von x, jedoch soll sie innerhalb gewisser Grenzen positiv bleiben, und es seien X' X'' X''' wie gewöhnlich ihre Differentiale, so hat die lineäre Differentialgleichung der dritten Ordnung:

$$X \cdot (X')^2 \cdot d^3 y_x + X' \cdot [(a + bX)(X')^2 - 3XX''] \cdot d^2 y_x +$$
$$+ [X(3X''X'' - X'X''') - (a+bX)(X')^2 \cdot X'' - (a_1 + b_1 X)(X')^4] \cdot dy_x + (a_2 + b_2 X) \cdot (X')^5 \cdot y = 0$$

wenn man der Kürze wegen $e^{-X_x} \cdot (z-r)^{m-1} \cdot (z-s)^{n-1} \cdot (z-t)^{p-1} = Z$ setzt, und für positive Werthe von m, n und p die Constanten a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 aus folgenden Gleichungen bestimmt:

$$a = m + n + p; \quad b = r + s + t; \quad *)$$
$$a_1 = m(s+t) + n(r+t) + p(r+s); \quad b_1 = rs + rt + st;$$
$$a_2 = mst + nrt + prs; \quad b_2 = rst$$

zunächst die folgenden 6 partikulären Integrale:

---

*) Man erkennt leicht, dass r, s und t die Wurzeln der kubischen Gleichung: $\xi^3 - b \cdot \xi^2 + b_1 \cdot \xi - b_2 = 0$ sind.

$$y_1 = \int_r^\infty Z \cdot dz; \qquad y_2 = \int_s^\infty Z \cdot dz; \qquad y_3 = \int_t^\infty Z \cdot dz; \qquad y_4 = \int_r^s Z \cdot dz;$$

$$y_5 = \int_r^t Z \cdot dz; \qquad y_6 = \int_s^t Z \cdot dz.$$

Da nun nach Nr. 9 je zwei der gegebenen sechs Partikulär-Integrale zu einem weiteren Partikulär-Integral combinirt werden können, so würden sich also noch $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ Formen ergeben, die der Differentialgleichung genügten, und diese, im Ganzen also 21 Formen, liessen sich auf $\frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1330$ verschiedene Weisen zum allgemeinen Integral zusammensetzen, wenn nicht in der That die 15 letzteren Integrale wenigstens in irgend einer Ordnung mit den schon gegebenen zusammenfielen. Die gegebenen 6 hängen aber, wie man sieht, wenn etwa $r < s < t$, durch die einfachen Gleichungen von einander ab:

$$y_4 + y_6 = y_5; \quad y_2 = y_1 + y_4; \quad y_3 = y_2 + y_6$$

so dass im Wesentlichen nur drei verschiedene Formen übrig bleiben.

Wenn nun m, n und p positive ganze Zahlen sind, so lassen sich, wie auch X beschaffen sein mag, wenn es nur positiv bleibt, die Integrale y_1, y_2, y_3 also auch y_4, y_5, y_6 sämmtlich in endlicher Form darstellen, und zwar in Reihen, die nach den reciproken Potenzen von X fortschreiten, deren Coefficienten ein überraschend einfaches Gesetz befolgen. Bezeichnet man nun in Nr. 9 den constanten Faktor, der mit dem Integral $e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx + Const.}$ verbunden ist, mit $e^{-lk} = \frac{1}{k}$; so findet man aus den beiden ersten Gleichungen in Nr. 9 durch Elimination:

$$\int \frac{y_1 \cdot e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx} \cdot dx}{(y_1 y_2' - y_1' y_2)^2} = k \cdot \frac{y_1 y_3' - y_1' y_3}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \qquad 11)$$

$$\int \frac{y_2 \cdot e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx} \cdot dx}{(y_1 y_2' - y_1' y_2)^2} = k \cdot \frac{y_2 y_3' - y_2' y_3}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \qquad 12)$$

Wenn man nun hierin die so eben erwähnten endlichen Formen y_1, y_2, y_3 etc. einführt, so lassen sich die Gleichungen 11) und 12) zur Darstellung sehr verwickelter Integrale benutzen.

Ermittelung complicirter bestimmter Integrale durch die lineären Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

§ 3.

Die am Schlusse des vorigen § angedeuteten Entwicklungen mögen wenigstens in Beziehung auf die lineären Differentialgleichungen der zweiten Ordnung hier eine Stelle finden. Seien y_1, y_2, y_3 partikuläre Integrale der Differentialgleichung

$$X_0 d^2 y_x + X_1 . dy_x + X_2 . y = 0$$ und zwar soll sein

$$y_3 = y_1 . \int \frac{e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1)^2} . dx = y_1 . Z$$ und der Kürze wegen $$\frac{e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1)^2} = U;$$

bezeichnet man ferner der Kürze wegen mit Z_α^x die Differenz $(Z)_x - (Z)_\alpha$, worin einmal für die Veränderliche x, sodann α gesetzt wird, so kann man immer annehmen:

$$y_3 = Ay_1 + B . y_2 \quad \text{oder}$$
$$y_1 . Z = Ay_1 + B . y_2 \quad \text{d. i.}$$
$$Z = A + B . \left(\frac{y_2}{y_1}\right) \quad \text{und hieraus:}$$
$$\alpha \ldots\ldots Z_\alpha^x = B . \left(\frac{y_2}{y_1}\right)_\alpha^x \ldots .$$

Ferner ergiebt sich durch Differentiiren:

$$y_3' = y_1' . Z + \frac{U}{y_1} = Ay_1' + By_2'$$
$$\text{oder} \quad Z + \frac{U}{y_1 y_1'} = A + B . \left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)$$
$$\text{und hieraus} \quad Z_\alpha^x + \left(\frac{U}{y_1 y_1'}\right)_\alpha^x = B . \left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)_\alpha^x \quad \ldots\ldots\ldots \beta)$$

Eliminirt man aus den Gleichungen α und β die Constante B, so kommt schliesslich:

$$Z_\alpha^x = \int_\alpha^x \frac{e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}}{(y_1)^2} . dx = \frac{\left(\frac{U}{y_1 y_1'}\right)_\alpha^x . \left(\frac{y_2}{y_1}\right)_\alpha^x}{\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)_\alpha^x - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)_\alpha^x} \quad \ldots\ldots 1)$$

vorausgesetzt, dass die verschiedenen Funktionen innerhalb der Integrationsgrenze nicht unendlich werden.

Wie später gezeigt werden soll, leistet der Differentialgleichung:

$$x . d^2 y_x + (\alpha + \beta x^n) . dy_x + (\alpha_1 + \beta_1 x^n) x^{n-1} . y = 0 \quad \ldots\ldots 2)$$

das bestimmte Integral

$$y = \int_r^\infty e^{-x^n} . z . (z - r)^{p-1} . (z - r_1)^{q-1} . dz = \int_r^\infty Z . dz$$

Genüge, wenn p und q, r und r_1 aus den Gleichungen:

$$\alpha = n \,.\, (p + q - 1) + 1 \,; \quad \alpha_1 = n \,.\, (pr + qr_1),$$
$$\beta = n \,.\, (r + r_1) \,; \quad \beta_1 = n^2 \,.\, rr_1$$

so bestimmt werden können, dass p und q positiv, r und r_1 reell werden. Man sieht zunächst, dass r und r_1 die Wurzeln der Gleichung $n^2\xi^2 - \beta n\xi + \beta_1 = 0$ sind, woraus:

$$r = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\beta_1}}{2n} \,; \quad r_1 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\beta_1}}{2n} \,; \ldots \, (\beta > 2\sqrt{\beta_1})$$

erhalten wird, und ferner:

$$p = \frac{n}{\sqrt{\beta^2 - 4\beta_1}} \cdot \left\{ \frac{\alpha_1}{n^2} - \frac{\alpha + n - 1}{n} \cdot \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\beta_1}}{2n} \right\}$$

oder $$p = \frac{1}{2n\sqrt{\beta^2 - 4\beta_1}} \cdot [2\alpha_1 + (\alpha + n - 1)(\sqrt{\beta^2 - 4\beta_1} - \beta)]$$

und eben so: $$q = \frac{1}{2n\sqrt{\beta^2 - 4\beta_1}} \cdot [(\alpha + n - 1)(\sqrt{\beta^2 - 4\beta_1} + \beta) - 2\alpha_1],$$

Es ist ferner leicht zu ersehen, dass auch:

$$y = \int_{r_1}^{\infty} Z \,.\, dz \,; \quad y = \int_{r}^{r_1} Z \,.\, dz \qquad (r_1 > r)$$

die Gleichung 2) befriedigen werden. — Wird einer der beiden Exponenten p oder q negativ, so hat man immer noch wenigstens ein partikuläres Integral, wenn innerhalb der nun noch nachbleibenden Grenzen die Funktion unter dem Integralzeichen nicht unendlich wird.

Ferner sieht man leicht ein, dass das allgemeine Integral $\int Z \,.\, dz$ immer in endlicher Form hergestellt werden kann, wenn p und q positive ganze Zahlen sind, ein Fall, auf den wir später eingehen wollen.

Versucht man die gegebene Differentialgleichung 2) in unendlichen Reihen zu integriren, so ergiebt sich, dass diese folgende Form haben müssen:

$$y = A \,.\, x^{\mu} + A_1 \,.\, x^{n+\mu} + A_2 \,.\, x^{2n+\mu} + A_3 \,.\, x^{3n+\mu} + \ldots$$

und weil nun:

$$y' = \frac{1}{x} \cdot [A\mu \,.\, x^{\mu} + A_1 \,.\, (n+\mu) x^{n+\mu} + A_2 \,.\, (2n+\mu) x^{2n+\mu} + A_3 \,.\, (3n+\mu) x^{3n+\mu} + \ldots]$$

$$y'' = \frac{1}{x^2} \cdot [A \,.\, \mu(\mu-1) x^{\mu} + A_1 \,.\, (n+\mu)(n+\mu-1) x^{n+\mu} + A_2 (2n+\mu)(2n+\mu-1) x^{2n+\mu} + \ldots]$$

so findet sich, wenn man der Kürze wegen folgende Bezeichnung gestattet:

$n_1 = n + \mu$	$b_1 = \alpha_1 + \beta\mu$	$a_1 = n + \mu - 1 + \alpha$
$n_2 = 2n + \mu$	$b_2 = \alpha_1 + \beta(n + \mu)$	$a_2 = 2n + \mu - 1 + \alpha$
$n_3 = 3n + \mu$	$b_3 = \alpha_1 + \beta(2n + \mu)$	$a_3 = 3n + \mu - 1 + \alpha$
. . . . .	. . . . .	. . . . .

zunächst zur Bestimmung von μ die folgende Gleichung:

$$[\mu \cdot \alpha + \mu \cdot (\mu - 1)] \cdot A = 0,$$

woraus, da A unbestimmt bleibt, $\mu = 0$ und $\mu = 1 - \alpha$ folgt. Sodann ergeben sich zur Bestimmung der weiteren Coefficienten A_1, A_2, A_3 ... die folgenden Gleichungen:

$$n_1 a_1 A_1 + b_1 \cdot A = 0$$
$$n_2 a_2 A_2 + b_2 \cdot A_1 + \beta_1 \cdot A = 0$$
$$n_3 a_3 A_3 + b_3 \cdot A_2 + \beta_1 \cdot A_1 = 0$$
$$n_4 a_4 A_4 + b_4 \cdot A_3 + \beta_1 \cdot A_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die hieraus hervorgehenden Formen für A_1, A_2, A_3 .... sind endliche Reihen, die nach Potenzen von β_1 fortschreiten, und deren Coefficienten wieder eigenthümliche aber nicht ganz einfache Bildungsgesetze befolgen. Bezeichnet man etwa

$\frac{b_1 b_3 b_4}{n_1 n_2 n_4 a_1 a_3 a_4}$ mit $C_{(1,3,4)}$; $\frac{b_1 b_3 b_5 b_6}{n_1 n_3 n_5 n_6 a_1 a_3 a_5 a_6}$ mit $C_{(1,3,5,6)}$ etc., so ist z. B.:

$$\frac{A_4}{A} = C_{(1,2,3,4)} - L_3 \cdot \beta_1 + M_1 \cdot \beta_1^2$$
$$\frac{A_5}{A} = -C_{(1,2,3,4,5)} + L_4 \cdot \beta_1 - M_2 \cdot \beta_1^2$$
$$\frac{A_6}{A} = +C_{(1,2,3,4,5,6)} - L_5 \cdot \beta_1 + M_3 \cdot \beta_1^2 - N_1 \cdot \beta_1^3$$

wobei:
$$L_3 = \frac{1}{n_4 a_4} \cdot C_{1,2} + \frac{1}{n_3 a_3} \cdot C_{1,4} + \frac{1}{n_2 a_2} \cdot C_{3,4}$$
$$L_4 = \frac{1}{n_5 a_5} \cdot C_{1,2,3} + \frac{1}{n_4 a_4} \cdot C_{1,2,5} + \frac{1}{n_3 a_3} \cdot C_{1,4,5} + \frac{1}{n_2 a_2} \cdot C_{3,4,5}$$
$$L_5 = \frac{1}{n_6 a_6} \cdot C_{1,2,3,4} + \frac{1}{n_5 a_5} \cdot C_{1,2,3,6} + \frac{1}{n_4 a_4} \cdot C_{1,2,5,6} + \frac{1}{n_3 a_3} \cdot C_{1,4,5,6} + \frac{1}{n_2 a_2} \cdot C_{3,4,5,6}$$

und man bemerkt, dass in L_3 der Reihe nach die Zeiger 3, 2 und 1 fehlen, in L_4 die Zeiger 4, 3, 2, 1, und ebenso in L_5 die Zeiger 5, 4, 3, 2, 1. Dagegen sind die Gesetze für M_1, M_2, M_3 ... nicht so einfach. Man hat:

$$M_1 = \frac{1}{n_2 n_4 a_2 a_4}$$
$$M_2 = \frac{1}{n_2 n_4 a_2 a_4} \cdot C_5 + \frac{1}{n_2 n_5 a_2 a_5} \cdot C_3 + \frac{1}{n_3 n_5 a_3 a_5} \cdot C_1$$
$$M_3 = \frac{1}{n_4 n_6 a_4 a_5} \cdot C_{1,2} + \frac{1}{n_3 n_6 a_3 a_6} \cdot C_{1,4} + \frac{1}{n_2 n_5 a_2 a_5} \cdot C_{1,6} + \frac{1}{n_2 n_6 a_2 a_6} \cdot C_{3,4} + \frac{1}{n_2 n_5 a_2 a_5} \cdot C_{3,6} + \frac{1}{n_2 n_4 a_2 a_4} \cdot C_{5,6}$$
$$N_1 = \frac{1}{n_2 n_4 n_6 a_2 a_4 a_6} \cdots\cdots \text{u. s. w.}$$

Vorausgesetzt, dass keiner der Faktoren n und a Null werden kann, für eine der beiden Annahmen von μ, wo dann die entsprechende Reihenentwickelung unzulässig ist, — so sieht man aus dem Vorhergehenden leicht ein, dass die Reihen für y convergiren für jeden endlichen Werth von x, indem bei fortschreitender Entwicklung die Quotienten zweier

auf einander folgender Coefficienten Am und $Am+1$, sich auf die Quotienten ihrer ersten Glieder reduciren.

In dem besonderen Fall, wenn $\beta_1 = 0$ ist, befolgen die Coefficienten $A_1, A_2, A_3 \ldots$ ein sehr einfaches Gesetz, während der Annahme $\beta_1 = 0$ die Bedingung $r = 0$ oder $r_1 = 0$ entspricht, so dass die Integrale y_1 und y_2 immer noch Geltung haben. Man erhält so:

$$A_1 = -\frac{b_1}{n_1 a_1} \cdot A; \quad A_2 = +\frac{b_1 b_2}{n_1 n_2 a_1 a_2} \cdot A; \quad A_3 = -\frac{b_1 b_2 b_3}{n_1 n_2 n_3 a_1 a_2 a_n} \cdot A \ldots A_4 = +\ldots$$

Die den beiden Werthen von μ entsprechenden Faktoren sind:

für $\mu = 0$

$$\begin{array}{lll} n_1 = n & b_1 = \alpha_1 & a_1 = n - 1 + \alpha \\ n_2 = 2n & b_2 = \alpha_1 + n\beta & a_2 = 2n - 1 + \alpha \\ n_3 = 3n & b_3 = \alpha_1 + 2n\beta & a_3 = 3n - 1 + \alpha \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

für $\mu = 1 - \alpha$

$$\begin{array}{lll} n_1 = n + 1 - \alpha & b_1 = \alpha_1 + \beta(1-\alpha) & a_1 = n \\ n_2 = 2n + 1 - \alpha & b_2 = \alpha_1 + \beta(n+1-\alpha) & a_2 = 2n \\ n_3 = 3n + 1 - \alpha & b_3 = \alpha_1 + \beta(2n+1-\alpha) & a_3 = 3n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Man erkennt hieraus, dass α und n so beschaffen sein müssen dass für ganze positive m, die Ausdrücke $mn + 1 - \alpha$ und $mn - 1 + \alpha$ nicht Null werden können, und da dies nicht zu gleicher Zeit stattfinden kann, so hat man sicher immer ein partikuläres Integral der Gleichung 2, in einer unendlichen convergenten Reihe ausgedrückt. Die beiden partikulären Integrale in Reihenform sind nun:

$$y_1 = 1 - \frac{\alpha_1 \cdot x^n}{1!\,n.(n-1+\alpha)} + \frac{\alpha_1 \cdot (\alpha_1+\beta n)}{n^2.2!\,(n-1+\alpha)(2n-1+\alpha)} \cdot x^{2n} -$$

$$- \frac{\alpha_1 \cdot (\alpha_1+\beta n)(\alpha_1+2\beta n)}{n^3.3!\,(n-1+\alpha)(2n-1+\alpha)(3n-1+\alpha)} \cdot x^{3n} + \ldots \quad \ldots \quad 3)$$

$$y_2 = x^{1-\alpha} \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha_1 + \beta(1-\alpha)}{n.1!\,(n+1-\alpha)} \cdot x^n + \frac{[\alpha_1+\beta(1-\alpha)][\alpha_1+\beta(n+1-\alpha)]}{n^2.2!\,(n+1-\alpha)(2n+1-\alpha)} \cdot x^{2n} - \right.$$

$$\left. - \frac{[\alpha_1+\beta(1-\alpha)][\alpha_1+\beta(n+1-\alpha)][\alpha_1+\beta(2n+1-\alpha)]}{n^3.3!\,(n+1-\alpha)(2n+1-\alpha)(3n+1-\alpha)} \cdot x^{3n} \ldots \right\} \quad \ldots \quad 4)$$

und befriedigen die Differentialgleichung:

$$x \cdot d^2 y_x + (\alpha + \beta x^n) \cdot dy_x + \alpha_1 x^{n-1} \cdot y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

für $r_1 = 0$, ist dann $\alpha = n(p+q-1)+1$; $\alpha_1 = n^2 . pr$; $\beta = n . r$; $\beta_1 = 0$

$$\text{d. i.:} \quad p = \frac{\alpha_1}{n\beta}; \quad q = \frac{\alpha\beta - \alpha_1}{n\beta} + \frac{n-1}{n}; \quad r = \frac{\beta}{n} \qquad 5a)$$

In dem Falle nun, wo p u. q positive ganze Zahlen sind, werden die Formen $mn + 1 - \alpha$,

und $mn - 1 + \alpha$ jetzt $n.(m-p-q+1)$; und $(m+p+q-1).n$, so dass nur die Reihe für y_1 als brauchbar übrig bleibt.

Man bringt die Reihen 3) und 4) auf ihre einfachste Gestalt, wenn man

$$\frac{\alpha_1}{\beta n} = \varepsilon; \quad \frac{n-1+\alpha}{n} = k; \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_1+\beta(1-\alpha)}{n\beta} = \varepsilon_1; \quad \frac{n+1-\alpha}{n} = k_1$$

setzt, wo α, β, α_1 und n ihren allgemeinen Charakter beibehalten sollen. Es ist sodann für diese Ausdrücke:

$$y_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{k.1!}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right) + \frac{\varepsilon.(\varepsilon+1)}{2!\,k.(k+1)}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right)^2 - \frac{\varepsilon.(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{(3!)k.(k+1)(k+2)}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right)^3 + \ldots \quad 3a)$$

$$y_2 = x^{1-\alpha}.\left\{1 - \frac{\varepsilon_1}{1!\,k_1}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right) + \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1+1)}{2!\,k_1(k_1+1)}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right)^2 - \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1+1)(\varepsilon_1+2)}{3!\,k_1(k_1+1)(k_1+2)}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right) + \ldots\right\} \quad 4a)$$

In dieser Gestalt ist es nicht schwer, die Summirung der Reihen 3a) und 4a) zu bewerkstelligen, wenn man nämlich von dem bekannten Integrale ausgeht:

$$\int_0^1 z^{p-1}.(1-z)^{q-1}.dz = \frac{\Gamma p.\Gamma q}{\Gamma(p+q)}$$

und darin substituirt $p = \varepsilon + m$, $q = k - \varepsilon$, wo m eine positive ganze Zahl sein soll. Man erhält, vermöge der bekannten Eigenschaften der Gammafunctionen:

$$\int_0^1 z^{\varepsilon+m-1}.(1-z)^{k-\varepsilon-1}.dz = \frac{\Gamma(\varepsilon+m).\Gamma(k-\varepsilon)}{\Gamma(k-\varepsilon)\ldots\Gamma(k+m)} = \frac{\varepsilon.(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+m-1)}{k.(k+1)\ldots(k+m-1)}.\frac{\Gamma\varepsilon.\Gamma(k-\varepsilon)}{\Gamma k}$$

Bezeichnet man mit A_m einen sogleich näher anzugebenden Coefficienten, und multiplicirt man die vorstehende Gleichung mit $A_m.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right)^m$ so ist:

$$\int_0^1 z^{\varepsilon-1}.(1-z)^{k-\varepsilon-1}.z^m.A_m.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right)^m.dz = \frac{\varepsilon.(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+m-1)}{k.(k+1)\ldots(k+m-1)}.A_m.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right)^m.\frac{\Gamma\varepsilon.\Gamma(k-\varepsilon)}{\Gamma k}$$

und wenn man nun $m = 0, 1, 2, \ldots$ $A_0 = 1$ $A_1 = -\frac{1}{1!}$ $A_2 = +\frac{1}{2!}$; $A_3 = -\frac{1}{3!}\ldots$ setzt, und die einzelnen Glieder summirt, so findet man:

$$\int_0^1 z^{\varepsilon-1}.(1-z)^{k-\varepsilon-1}.e^{-\frac{\beta x^n}{n}.z}.dz = \frac{\Gamma\varepsilon.\Gamma(k-\varepsilon)}{\Gamma k}.\left(1 - \frac{\varepsilon}{1!\,k}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right) + \frac{\varepsilon.(\varepsilon+1)}{2!\,k.(k+1)}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right)^2 - \ldots\right)$$

woraus folgt:

$$y_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{1!\,k}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right) + \frac{\varepsilon.(\varepsilon+1)}{2!\,k.(k+1)}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right)^2 - \ldots = \frac{\Gamma k}{\Gamma\varepsilon.\Gamma(k-\varepsilon)}.\int_0^1 z^{\varepsilon-1}.(1-z)^{k-\varepsilon-1}.e^{-\frac{\beta x^n}{n}z}.dz \quad 6)$$

und eben so:

$$1 - \frac{\varepsilon_1}{1!\,k_1}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right) + \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1+1)}{2!\,k_1(k_1+1)}.\left(\frac{\beta x^n}{n}\right)^2 - \ldots = \frac{\Gamma k_1.x^{\alpha-1}}{\Gamma\varepsilon_1\Gamma(k_1-\varepsilon_1)}.\int_0^1 z^{\varepsilon_1-1}.(1-z)^{k_1-\varepsilon_1-1}.e^{-\frac{\beta x^n}{n}z}.dz \quad 7)$$

Setzt man für ε, k und $\frac{\beta}{n}$ ihre Werthe, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen 5a) . . . $\varepsilon = p$, $k - \varepsilon = q$ $\frac{\beta}{n} = r$ $\alpha - 1 = n(p+q-1)$ und eben so $\varepsilon_1 = 1 - p$, $k_1 - \varepsilon_1 = 1 - q$; also $k_1 = 2 - (p+q) = 2 - \mu$. . . . dadurch erhält man in 6) und 7) für $(p+q) = \mu$:

$$y_1 = 1 - \frac{p}{\mu}\cdot\frac{rx^n}{1!} + \frac{p\cdot(p+1)}{\mu\cdot(\mu+1)}\cdot\frac{(rx^n)^2}{2!} - \frac{p\cdot(p+1)(p+2)}{\mu\cdot(\mu+1)(\mu+2)}\cdot\frac{(rx^n)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma p\cdot\Gamma q}\cdot\int_0^1 z^{p-1}\cdot(1-z)^{q-1}\cdot e^{-rx^n\cdot z}\cdot dz \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

$$y_2 = x^{-n(p+q-1)}\cdot\left\{1 - \frac{(1-p)}{(2-\mu)}\cdot\frac{rx^n}{1!} + \frac{(1-p)(2-p)}{(2-\mu)(3-\mu)}\cdot\frac{(rx^n)^2}{2!} - \ldots\right\} =$$

$$= \frac{\Gamma(2-\mu)\cdot x^{-n(p+q-1)}}{\Gamma(1-p)\cdot\Gamma(1-q)}\cdot\int_0^1 z^{-p}\cdot(1-z)^{-q}\cdot e^{-rx^n\cdot z}\cdot dz \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

Man ersieht hieraus, dass die Summation der beiden Reihen in 8) und 9) nur in dem Falle zulässig ist, wenn p und q positive ächte Brüche sind. Für einen grösseren positiven Werth von p und q ist nur die Form in 8), für einen negativen von p und q nur die Form in 9) von endlicher Bedeutung.

Das der Differentialgleichung 2) genügende bestimmte Integral:

$\int_r^{r_1} e^{-x^n\cdot z}\cdot(z-r)^{p-1}\cdot(z-r_1)^{q-1}\cdot dz$ geht für $r=0$, $r_1 z$ statt z, und wenn man schliesslich r für r_1 schreibt, über in: $(-1)^{p-1}\cdot r^p\cdot\int_0^1 e^{-rx^n\cdot z}\cdot z^{p-1}\cdot(1-z)^{q-1}\cdot dz$, welches sich, wie man sieht, nur durch einen constanten Faktor von dem obigen unterscheidet. — Aus 8) und 9) ergeben sich noch, wenn man $rx^n = u$ setzt, die bestimmten Integrale:

$$\int_0^1 e^{-uz}\cdot z^{p-1}\cdot(1-z)^{q-1}\cdot dz = \left\{1 - \frac{p}{u}\cdot\frac{u}{1} + \frac{p\cdot(p+1)}{\mu\cdot(\mu+1)}\cdot\frac{u^2}{2!} - \frac{p\cdot(p+1)(p+2)}{\mu\cdot(\mu+1)(\mu+2)}\cdot\frac{u^3}{3!} + \ldots\right\}\cdot\frac{\Gamma p\cdot\Gamma p}{\Gamma\mu} \quad 10)$$

$$\int_0^1 e^{-uz}\cdot z^{-p}\cdot(1-z)^{-q}\cdot dz = \frac{\Gamma(1-p)\cdot\Gamma(1-q)}{\Gamma(2-\mu)}\cdot\left\{1 - \frac{(1-p)}{(2-\mu)}\cdot\frac{u}{1!} + \frac{(1-p)(2-p)}{(2-\mu)(3-\mu)}\cdot\frac{u^2}{2!} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1-p)(2-p)(3-p)}{(2-\mu)(3-\mu)(4-\mu)}\cdot\frac{u^3}{3!} + \ldots\right\} \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

wobei die Reihen, wie man sieht, etwas rascher convergiren als die Reihe für e^x.